E.N.S. FONTENAY & SAINT.CLOUD 1982
Option Mathématiques

MATHEMATIQUES II

DURÉE : 4 heures

PROBLÈME

Les trois parties de ce problème sont indépendantes

I

On considère l'équation différentielle suivante, où a et b sont deux nombres réels :

$$(E) \qquad x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + ax\frac{dy}{dx} + by = 0$$

1° *a.* Rappeler pourquoi l'ensemble des solutions de (E) sur $]0, +\infty[$ est un sous-espace de dimension 2 de l'espace vectoriel des fonctions réelles de classe C^2 sur $]0, +\infty[$.

b. On rappelle qu'une application Φ de $]0, +\infty[$ dans C est une solution complexe de l'équation différentielle (E) si les fonctions réelles Re Φ et Im Φ sont des solutions de (E).

Montrer que l'ensemble des solutions complexes de (E) sur $]0, +\infty[$ est un espace vectoriel complexe de dimension 2.

2° A quelle condition l'équation (E) admet-elle des solutions polynomiales?

3° En effectuant le changement de variable $x = e^t$, résoudre l'équation (E); préciser la forme générale des solutions réelles.

II

Soient $a(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ et $b(x) = \sum_{n\geq 0} b_n x^n$ les sommes de deux séries entières à coefficients réels dont les rayons de convergence sont supérieurs ou égaux à R, $(R>0)$.

On considère l'équation différentielle (F) sur l'intervalle $]0, R[$:

$$(F) \qquad x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + a(x)\, x\frac{dy}{dx} + b(x)\, y = 0$$

On rappelle que si x est un réel strictement positif, et k un nombre complexe le symbôle x^k désigne le nombre complexe exp $(k \text{ Log } x)$.

1° Soient k un nombre complexe et $c(x) = \sum_{n\geq 0} c_n x^n$ la somme d'une série entière complexe de rayon de convergence différent de 0. On suppose c_0 égal à 1.

a. Montrer que si la fonction $y = c(x)\, x^k$ est une solution complexe de (F) sur un intervalle $]0, R'[$, le nombre complexe k est racine d'une équation du second degré que l'on établira.

b. Montrer que sous cette hypothèse les nombres c_n vérifient une suite de relations que l'on précisera.

2° Soit k une racine de l'équation (C) :

$$(C) \qquad k^2 + (a_0 - 1)\, k + b_0 = 0$$

a. On suppose que $(a_0 - 1)^2 - 4\, b_0$ n'est pas le carré d'un nombre entier. Montrer qu'il existe une suite de nombres complexes et une seule vérifiant :

$$c_0 = 1$$

et la suite des relations de récurrence établies en II. 1° *b*).

b. Que dire du cas général?

.../...

3° *a.* Soit (c_n) la suite construite à la question précédente, lorsque c'est possible. On désigne par d_n le module du nombre c_n; montrer que la suite de nombres réels positifs (d_n) vérifie les inégalités :

$$n\,|\,n + 2k + a_0 - 1\,|\,d_n \leqslant \sum_{0 \leqslant m \leqslant n-1} d_m\,(|\,b_{n-m}\,| + |\,k + m\,|\,|\,a_{n-m}\,|)$$

pour tout entier n supérieur ou égal à 1.

b. Montrer, pour tout nombre positif δ strictement inférieur à R, qu'il existe un entier n_0 tel que, pour tout n supérieur à n_0, on ait :

$$d_n\,\delta^n \leqslant \sup_{0 \leqslant m \leqslant n-1} (d_m\,\delta^m)$$

4° Montrer qu'il existe un nombre complexe k et une série entière complexe de rayon de convergence au moins égal à R, de somme $c(x)$, tels que la fonction $y = c(x)\,x^k$ soit solution de (F) sur]0, R[.

III

Soient $a_1, \ldots a_p$, p nombres réels tous différents et P le polynôme défini par :

$$P(x) = \prod_{i=1}^{i=p} (x - a_i)$$

Soient Q et R deux polynômes à coefficients réels.

On considère l'équation différentielle (Φ)

$$(\Phi) \qquad [P(x)]^2 \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + P(x) \cdot Q(x) \cdot \frac{dy}{dx} + R(x) \cdot y = 0$$

1° Soit a_i l'un des nombres $a_1, \ldots, a_p$.

a. Montrer que y est une solution de (Φ) sur $]a_i, a_i + \varepsilon[$ si et seulement si la fonction définie par $z(t) = y(t + a_i)$ est solution sur l'intervalle $]0, \varepsilon[$ de l'équation différentielle (F_i).

$$(F_i) \qquad t^2 \cdot \frac{d^2z}{dt^2} + t \cdot A_i(t) \cdot \frac{dz}{dt} + B_i(t) \cdot z = 0$$

où A_i et B_i sont des fractions rationnelles que l'on précisera.

b. Montrer qu'il existe un réel positif R_i tel que les fonctions A_i et B_i soient développables en série entière sur $]-R_i, +R_i[$.

c. On appelle valeurs caractéristiques en a_i de l'équation (Φ) les deux racines de l'équation du second degré :

$$k^2 + (a_0 - 1)\,.\,k + b_0 = 0$$

où $a_0 = A_i(0)$ et $b_0 = B_i(0)$.

Exprimer la somme des deux valeurs caractéristiques en a_i à l'aide des polynômes P et Q.

2° *a.* Montrer que y est une solution de (Φ) sur $]S, +\infty[$ où $S = \mathrm{Sup}(0, \sup(a_i))$ si et seulement si la fonction z définie par $z(t) = y(1/t)$ est solution sur l'intervalle $]0, 1/S[$, ($]0, +\infty[$ si $S = 0$), d'une équation différentielle $(\tilde{\Phi})$:

$$(\tilde{\Phi}) \qquad t^2 \cdot \frac{d^2z}{dt^2} + \tilde{A}(t) \cdot t \cdot \frac{dz}{dt} + \tilde{B}(t) \cdot z = 0$$

où $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ sont des fractions rationnelles.

b. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur les degrés de P, Q, et R pour que les fonctions $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ soient développables en série entière au voisinage de 0.

c. Cette condition étant remplie, on appelle valeurs caractéristiques à l'infini de l'équation (Φ) les valeurs caractéristiques en 0 de l'équation $(\tilde{\Phi})$.

Quelle est leur somme?

3° Quelle est la somme de toutes les valeurs caractéristiques de l'équation différentielle (Φ) en tous les points a_i et à l'infini?

4° On considère le polynôme $P(x) = x.(x - 1)$. Déterminer des polynômes Q et R, tels que les valeurs caractéristiques de l'équation différentielle (Φ) correspondante soient respectivement :

0 et 0 au point 0, 0 et 0 au point 1, 1/2 et 1/2 à l'infini.

5° Soit (Φ') l'équation différentielle obtenue en 4° : existe-t-il une solution de (Φ') définie sur $]0, +\infty[$?

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail